Phänomenologische Betrachtungen zum Strahlungsgesetz *

Hermann Hartmann

Akademie der Wissenschaften und der Literatur zu Mainz,
Arbeitsstelle für theoretische Chemie

(Z. Naturforsch. **32 a**, 341–342 [1977]; eingegangen am 19. Januar 1977)

A Phenomenological Extension of the Radiation Law

The phenomenological inclusion of an elementary length leads to a generalized radion law, which includes Plancks and Eulers laws as limiting cases.

P. Jordan hat 1946 in dieser Zeitschrift eine Abhandlung zur Theorie der kosmischen Strahlung veröffentlicht [1], in der es darum ging, das Eulersche Verteilungsgesetz (Energiedichte $\varrho^* \sim 1/\varepsilon^{*n}$ mit $n \approx 1{,}85$ und ε^* als charakteristischer Energie pro „Strahlungsquant") im Rahmen einer durch Berücksichtigung einer elementaren Länge $a \approx 10^{-13}$ cm erweiterten Theorie der Hohlraumstrahlung verständlich zu machen.

Jordan ist bei seinen Überlegungen von zwei Annahmen ausgegangen, die bestritten werden können. Sie lauten:

1. Die kosmische Strahlung darf – und dies zumindest in ihrer primären Gestalt – als elektromagnetische Strahlung angesehen werden.
2. Die primäre kosmische Strahlung ist eine Gleichgewichtsstrahlung.

Ganz abgesehen von einem unmittelbaren Bezug auf die kosmische Strahlung sind aber die Jordanschen Überlegungen deshalb wichtig, weil sie eine Verallgemeinerung der Theorie der Hohlraumstrahlung betreffen.

Da wir eine Veränderung dieser Theorie in ihrem statistischen Teil, wie sie bei Jordan postuliert wird, für ein allzu künstliches Verfahren gehalten haben, wurde 1960 in einer kurzen Notiz [2] gezeigt, wie man das angestrebte Ziel auch auf eine solche Weise erreichen kann, daß dabei der statistische Teil der Theorie intakt bleibt.

Mittlerweile hat eine erneute Überprüfung des seinerzeit verfolgten Grundgedankens eine korrigierte und verbesserte Argumentation erbracht, die wir für nützlich halten und deshalb hier kurz darstellen.

Der sogenannte klassische Elektronenradius a ($\approx 10^{-13}$ cm) bestimmt als elementare Länge eine minimale Wellenlänge $\lambda_{\min} = a$. Daraus errechnet sich formal eine maximale spezifische Energie $\varepsilon_{\max} = c\,h/a \approx 10^{-3}$ erg.

* Herrn Prof. Dr. Erich Hückel in Verehrung zum 80. Geburtstag gewidmet.

Für eine plausible phänomenologische Einführung von $\varepsilon_{\max}$ in die Theorie der Hohlraumstrahlung betrachten wir gesondert als System I den von Strahlung erfüllten isolierbaren Hohlraum sowie als System II eine Strahlungsmeßvorrichtung, die an das System I angekoppelt werden kann.

Bei der Beschreibung der im System I herrschenden Verhältnisse führen wir eine Abänderung der bekannten Theorie im Sinne einer Abschneidevorschrift in der Weise ein, daß wir für die Zahl $\mathrm{d}Z$ der Oszillatoren mit spezifischen Energien zwischen ε und $\varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon$

$$\mathrm{d}Z = [8\,\pi\,V/(c\,h)^3]\,\varepsilon^2\,\mathrm{d}\varepsilon \quad \text{nur für} \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_{\max} \qquad (1\,\mathrm{a})$$

dagegen

$$\mathrm{d}Z = 0 \quad \text{für} \quad \varepsilon > \varepsilon_{\max} \qquad (1\,\mathrm{b})$$

annehmen (V ist das Volumen des Hohlraumes). Diese Annahme nennen wir die Hypothese A. Wie in der bekannten Theorie folgt nun durch Berücksichtigung der Quantenstatistik für die Zahl $\mathrm{d}H$ der Quanten pro Volumeinheit, welche Energieinhalte zwischen ε und $\varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon$ besitzen

$$\mathrm{d}H = \frac{\mathrm{d}Z}{V\,(e^{\beta\varepsilon} - 1)} = \frac{8\,\pi}{(c\,h)^3} \cdot \frac{\varepsilon^2\,\mathrm{d}\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon} - 1} \ \text{für} \ 0 < \varepsilon < \varepsilon_{\max} \quad \text{mit} \ \beta = \frac{1}{k\,T}. \qquad (2\,\mathrm{a})$$

Für den Bereich $\varepsilon > \varepsilon_{\max}$ folgt aus (1 b)

$$\mathrm{d}H = 0\,. \qquad (2\,\mathrm{b})$$

$\mathrm{d}H$ hängt mit der Verteilungsfunktion $\varrho(\varepsilon)$ für die Energiedichte allgemein nach

$$\varrho(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon = \varepsilon\,\mathrm{d}H \qquad (3)$$

zusammen. Es ist also

$$\varrho(\varepsilon) = \frac{8\,\pi}{(c\,h)^3} \cdot \frac{\varepsilon^3}{e^{\beta\varepsilon} - 1} \quad \text{für} \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_{\max} \qquad (4\,\mathrm{a})$$

und

$$\varrho(\varepsilon) = 0 \qquad \text{für} \quad \varepsilon > \varepsilon_{\max}\,. \qquad (4\,\mathrm{b})$$

Energiequanten, welche nach Ankoppelung der Strahlungsmeßvorrichtung II an das System I in dieser auftreten, nennen wir ε^*. In der bekannten Theorie ist das Auftreten eines Energiequants der Größe ε^* in der Meßvorrichtung mit dem Verschwinden eines gleichgroßen Energiequants $\varepsilon\,(=\varepsilon^*)$ aus dem strahlungserfüllten Hohlraum I verknüpft. Die Beibehaltung dieser Auffassung hätte zur Folge, daß nach der mit der Hypothese A eingeführten Abschneidevorschrift für alle in der Meßvorrichtung auftretenden Energiequanten $\varepsilon^* < \varepsilon_{\max}$ gelten müßte.

Wir halten eine solche Einschränkung für unrealistisch und führen zu ihrer Vermeidung eine Annahme ein, die wir die Hypothese B nennen.

Das Auftreten von Energiequanten der Größe ε^* in II soll mit Energiequanten der Größe ε in I zusammenhängen, wobei ε^* und ε nach

$$\varepsilon^* = \varepsilon/(1-\varepsilon/\varepsilon_{\max}) \tag{5}$$

verknüpft sind. Aus (5) folgt $\varepsilon^*/\varepsilon > 1$ für $\varepsilon > 0$. Für den Grenzfall $\varepsilon \to 0$ geht $\varepsilon^*/\varepsilon$ gegen eins. Für $\varepsilon \to \varepsilon_{\max}$ geht ε^* gegen unendlich.

Um die Energiebilanz im Mittel in Ordnung zu bringen, soll ein Energiebetrag ε^* in II erst auftreten, wenn im Mittel $1/w$ Quanten der Größe ε in I verschwunden sind. Für w soll

$$w\,\varepsilon^* = \varepsilon \tag{6}$$

gelten. Aus (6) folgt mit (5)

$$w = 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\max}} = \frac{1}{[1+\varepsilon^*/\varepsilon_{\max}]}\,. \tag{7}$$

Wenn man die Forderung, daß die Energiebilanz im Mittel erfüllt sein soll, als triviale Bedingung ansieht, ist die Hypothese B allein durch (5) charakterisiert. Dieser Zusammenhang ist aber wohl der einfachste von denen, welche den Bedingungen

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^*/\varepsilon) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\varepsilon\to\varepsilon_{\max}}(\varepsilon^*/\varepsilon) \to \infty \tag{8}$$

genügen.

Die Beobachtungen in II ergeben nach Hypothese B ein effektives Verteilungsgesetz für die Energiedichte, für das

$$\varrho^*(\varepsilon^*)\,d\varepsilon^* = w\,\varepsilon^*\,dH \tag{9}$$

gilt. Es ist also dann

$$\varrho^*(\varepsilon^*) = \frac{8\pi\,\varepsilon^{*3}}{(c\,h)^3\,(1+\varepsilon^*/\varepsilon_{\max})^5\,[\exp\{\beta\,\varepsilon^*/(1+\varepsilon^*/\varepsilon_{\max})\}-1]}\,. \tag{10}$$

Es ist lehrreich, die Grenzfälle zu untersuchen. Für den Bereich $0 < \varepsilon^* \ll \varepsilon_{\max}$ folgt aus (10)

$$\varrho^*(\varepsilon^*) = \frac{8\pi}{(c\,h)^3}\,\frac{\varepsilon^{*3}}{(e^{\beta\varepsilon^*}-1)}\,. \tag{11}$$

Das ist das Plancksche Verteilungsgesetz. Für $\varepsilon^* \gg \varepsilon_{\max}$ folgt aus (10) dagegen

$$\varrho^*(\varepsilon^*) \approx \frac{8\pi}{(c\,h)^3}\cdot\frac{1}{(e^{\beta\varepsilon_{\max}}-1)\,\varepsilon^{*2}}\,. \tag{12}$$

Dieses Verteilungsgesetz liegt in der Nähe des Eulerschen Gesetzes.

[1] P. Jordan, Z. Naturforsch. **1**, 301 [1946].

[2] H. Hartmann, Naturwiss. **47**, 536 [1960].